مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

مبادئ في الحسابيات

تعاريف و خاصيات

1 - الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية

$n \in \mathbb{N}^*$:

- n زوجي يكافئ n يقبل القسمة على 2
يكافئ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $n = 2k$

2 - الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية

$n \in \mathbb{N}^*$:

- n فردي يكافئ n لا يقبل القسمة على 2
يكافئ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $n = 2k + 1$

نتائج

- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي
- مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي
- مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي
- مربع عدد زوجي هو عدد زوجي
- مربع عدد فردي هو عدد فردي

3- مضاعفات و قواسم عدد صحيح طبيعي

k, d, m أعداد صحيحة طبيعية

$m = dk$ يكافئ m مضاعف ل d

يكافئ d قاسم ل m

4- الأعداد الأولية

يكون العدد الصحيح الطبيعي أوليا إذا كان له قاسمان فقط

مثال

0 ليس أوليا لأن له أكثر من قاسمان

1 ليس أوليا لأن له قاسم واحد

19,17,13,11,7,5,3,2 أعداد أولية

5- القاسم المشترك الأكبر – المضاعف المشترك الأصغر

- **القاسم المشترك الأكبر**

$b \in \mathbb{N} ; a \in \mathbb{N}$

القاسم المشترك الأكبر ل a و b هو جداء الأعداد الأولية المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أصغر أس

نرمز إليه ب : $a \vee b$ أو $D(a;b)$

– **المضاعف المشترك الأصغر**

المضاعف المشترك الأصغر ل a و b هو جداء الأعداد الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أكبر أس

نرمز إليه ب : $a \wedge b$ أو $M(a;b)$

الحساب المتجهي

I) المتجهات

جميع متجهات المستوى تكون مجموعة تسمى مجموعة متجهات المستوى

نرمز إليه ب : (V)

1- تساوي متجهتين

$A;B;C;D$ أربع نقط من المستوى (P)

$(A \neq B ; C \neq D)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يكافئ $ABDC$ متوازي الأضلاع

يكافئ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه نفس المنحى ونفس المعيار

خاصية

مهما تكن $\vec{u}$ من (V) و A من (P) توجد نقطة وحيدة B من (V) بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

نتائج

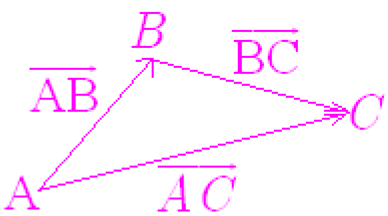
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ يكافئ $C = D$

$\overrightarrow{AB} = 0$ يكافئ $A = B$

2- مجموع متجهتين

علاقة شال

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



نتيجة

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

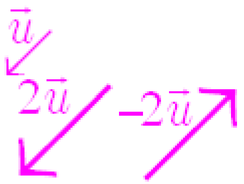
3- ضرب متجهة في عدد حقيقي

إذا كان : $\vec{u} \in (V)$ و $k \in \mathbb{R}$

فإن : - $k\vec{u}$ متجهة

- $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الإتجاه
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

مثال



ملاحظة :

إذا كان : $k > 0$ فإن : $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس المنحى

إذا كان : $k > 0$ فإن : $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما منحيان متعاكسان

خاصيات

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من (V) ؛ α و β عددان حقيقيان

1- $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

2- $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$

3- $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

4- $1\vec{u}=\vec{u}$

5- $\alpha\vec{u}=0$ يكافئ $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$

4- استقامية متجهتين

تعريف

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من (V)

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا وجد $k\in\mathbb{R}$ بحيث $\vec{v}=k\vec{u}$

مثال

$\vec{u}=3\vec{w}$ و $\vec{v}=5\vec{w}$

بين أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ملاحظة

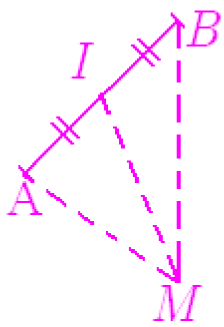
- المتجهة المنعدمة مستقيمية مع جميع متجهات المستوى
- $A;B;C$ نقط مستقيمية يكافئ $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقيميتان
- $(AB)//(CD)$ كافئ $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مستقيميتان

5- منتصف قطعة

خاصية1

I منتصف $[A;B]$ يكافئ $\vec{AI}=\vec{IB}=\frac{1}{2}\vec{AB}$

يكافئ $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$



خاصية2

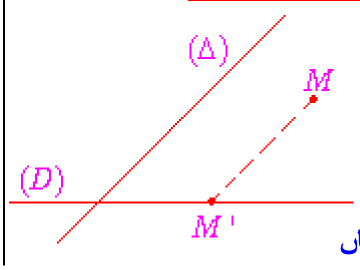
I منتصف $[A;B]$.

مهما تكن M من المستوى

فإن $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MI}$

الإسقاط

I) - الإسقاط على مستقيم بتواز مع مستقيم آخر



تعريف

(D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان

M نقطة من المستوى

و M' نقطة بحيث :

$M'\in(D)$ و $(MM')\parallel(\Delta)$

M' تسمى مسقط M على (D) بتواز مع (Δ)

نرمز : $P_{(D;\Delta)}(M)=M'$ أو $P(M)=M'$

ملاحظة

أ- $P_{(D;\Delta)}(M)=M'$ يكافئ $(MM')\parallel(\Delta)$ و $M'\in(D)$

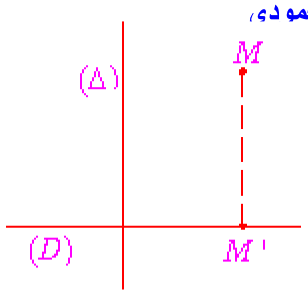
ب- إذا كان : $A\in(D)$ فإن : $P_{(D;\Delta)}(A)=A$

II) - الإسقاط العمودي

إذا كان : $(D)\perp(\Delta)$ و $P_{(D;\Delta)}(M)=M'$

فإن : M' تسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)

نرمز : $P_{(D)}(M)=M'$



III) مبرهنة طاليس

1 - مبرهنة طاليس المباشرة

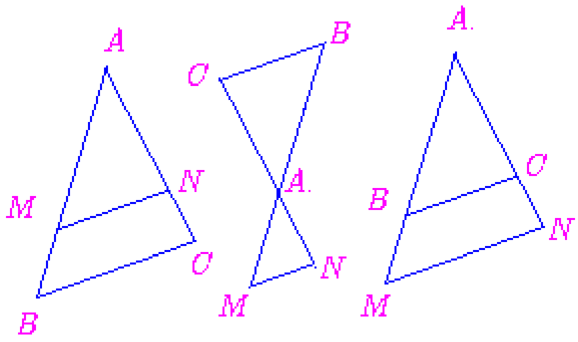
خاصية

ABC مثلث

M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$

إذا كان : $(BC)\parallel(MN)$

فإن : $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$



خاصية2

$(BC)\parallel(MN)$ و $(BM)\cap(CN)=\{A\}$

يوجد $k\in\mathbb{R}$

بحيث : $\vec{AC}=k\vec{AN}$; $\vec{AB}=k\vec{AM}$; $\vec{BC}=k\vec{MN}$

2 - مبرهنة طاليس العكسية

خاصية

ABC مثلث

M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$

بحيث : النقط $A;M;B$ و النقط $A;N;C$ لها نفس الترتيب

إذا كان : $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$

فإن : $(BC) \parallel (MN)$

3 - مبرهنة طاليس المباشرة بالإسقاط

خاصية

نعتبر : $P = P_{(D;\Delta)}$

(L) مستقيم ضمن المستوى لا يوازي (Δ)

A و B نقطتان مختلفتان من (L)

إذا كانت C نقطة من (L) بحيث :

$P(A)=A'$ و $P(B)=B'$ و $P(C)=C'$

فإن : $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

4- معامل استقامية متجهتين

نعتبر : $P = P_{(D;\Delta)}$

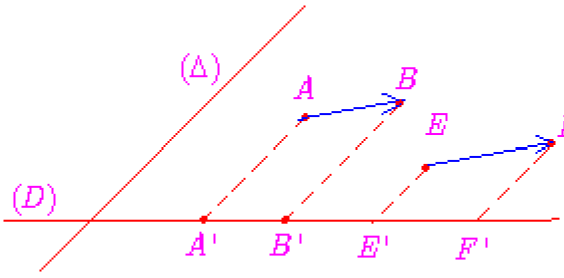
خاصية

إذا كان : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{EF}$

و : $P(A)=A'$ ؛ $P(B)=B'$

$P(E)=E'$ ؛ $P(F)=F'$

فإن : $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{E'F'}$



المجموعات $\mathbb{N};\mathbb{Z};ID;\mathbb{Q};\mathbb{R}$

1- المجموعات

- $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

$\mathbb{N}=\{1;2;3;........\}$

- $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية النسبية

$\mathbb{Z}=\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;........\}$

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

- ID هي مجموعة الأعداد العشرية النسبية

$ID=\left\{\frac{a}{10^p}/a\in\mathbb{Z};p\in\mathbb{N}\right\}$

مثال

$1;5\in ID$; $1,5\notin\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID$

- $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد الجذرية

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$

مثال

$\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$; $\frac{2}{3}\notin ID$

نتيجة

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}$

- $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الجذرية و الاجذرية

$\mathbb{R}$ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال

$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\sqrt{9}\in\mathbb{N}$; $\sqrt{9}\in\mathbb{Q}$

نتيجة

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

2- النشر و التعميل

خاصية

$a(b+c)=ab+ac$

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

المتطابقات الهامة

أ- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ب- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

الترتيب في $\mathbb{R}$

1- الترتيب في $\mathbb{R}$

تعريف

$a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$

$a\le b$ يعني $a-b\le 0$

يعني $a-b\in\mathbb{R}^-$

خاصيات " الترتيب "

d,c,b,a أعداد حقيقية

أ – إذا كان $a \le b$ فإن $a+c \le b+c$

ب- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فإن $a+c \le b+d$

ج - إذا كان $a \le b$ و $c \ge 0$ فإن $ac \le bc$

د- إذا كان $a \le b$ و $c \le 0$ فإن $ac \ge bc$

هـ - إذا كان $a \le b$ و $a \ge 0$ و $b \ge 0$

فإن $a^2 \le b^2$ و $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

و - إذا كان a و b غير منعدمين و لهما نفس الإشارة

فإن $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

2- التأطير

تعريف

$a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a < x < b$

يسمى تاطيرا للعدد x سعته $b-a$

خاصيات

y,x,d,c,b,a أعداد حقيقية

- إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ فإن

$a+c \le x+y \le b+d$

- إذا كان $0 \le a \le x \le b$ و $0 \le c \le y \le d$ فإن

$ac \le xy \le bd$

- إذا كان $0 < a \le x \le b$ فإن $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{x} \ge \dfrac{1}{b}$

3- التقريب بإفراط وتفريط

تعريف

x,b,a أعداد حقيقية

إذا كان $a \le x \le b$ أو $a \le x < b$ أو $a < x \le b$ أو

$a < x < b$

فإن : a يسمى تقريبا ل x بتفريط بالدقة $b-a$

b يسمى تقريبا ل x بإفراط بالدقة $b-a$

مثال

$$3,143 < \frac{22}{7} < 3,144$$

$3,143$ تقريب ل $\dfrac{22}{7}$ بتفريط بالدقة $0,01$

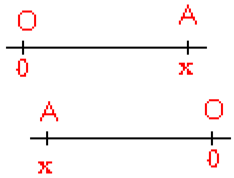
$3,144$ تقريب ل $\dfrac{22}{7}$ بإفراط بالدقة $0,01$

4- المجالات

تعريف

b,a عددان حقيقيان بحيث $a \le b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \le x \le b\}$



$\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a,b]$

$b-a$ هي سعة المجال $[a,b]$

ملاحظة

$x \in [a,b]$ يكافئ $a \le x \le b$

5- القيمة المطلقة

تعريف

$x \in \mathbb{R}$

$|x| = OA$ القيمة المطلقة ل x

خاصيات

أ- $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} -x & x \in \mathbb{R}^- \quad \text{إذا كان} \\ x & x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

ب- $x \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}^+$

$|x| = r$ يعني $x = r$ أو $x = -r$

ج- $x \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}^+$

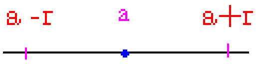
$|x| \le r$ يكافئ $-r \le x \le r$

يكافئ $x \in [-r, r]$

د- $|x| \ge r$ يكافئ $x \ge r$ و $x \le -r$

يكافئ $x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$

هـ- $x \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}^+$ و $a \in \mathbb{R}$



$|x-a| \le r$ يكافئ $a-r \le x \le a+r$

يكافئ $x \in [a-r, a+r]$

نقول أن a قيمة مقربة ل x بالدقة r

بنفس الطريقة $|x-a| < r$

ملاحظة

إذا كان $a \le x \le a+r$ فإن :

a قيمة مقربة ل x بتفريط بالدقة r

إذا كان $a-r \le x \le a$ فإن :

a قيمة مقربة ل x بإفراط بالدقة r

المستقيم في المستوى

المستقيم في المستوى

I) المستقيم في المستوى

معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

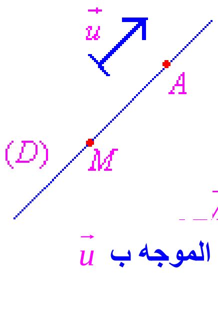
1- تعريف

A نقطة من المستوى

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

مجموعة النقط M بحيث $\vec{AM} = t\vec{u}$

هو المستقيم (D) المار من A و الموجه ب $\vec{u}$



نرمز له ب : $D(A;\vec{u})$

ملاحظة

كل مستقيم معرف بنقطة يمر منها و متجهة مو جهة له

2- التمثيل البارامتري لمستقيم

تعريف

$A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى .

$\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة غير منعدمة

النظمة : $\begin{cases} x = x_0+\alpha t & t\in\mathbb{R} \\ y = y_0+\beta t \end{cases}$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه ب $\vec{u}$

ملاحظة

كل مستقيم يقبل عددا لا منتهيا من التمثيلا ت البارامترية

3- معادلة ديكارتية لمستقيم

أ- استقامية متجهتين

نعتبر : $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(\alpha;\beta)$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha$$

تسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j})$

خاصية

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان يكافئ $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

ب- معادلة ديكارتية لمستقيم

كل مستقيم (D) له معادلة ديكارتية على الشكل :

$(D): ax+by+c=0$ $\quad (a;b)\neq(0;0)$

ملاحظة

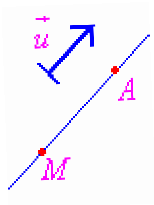
1 - $\vec{u}(-b;a)$ موجهة ل (D)

2 - (D) مستقيم يمر من النقطة $A(m;n)$

(D) يوازي محور الأفاصيل يكافئ $(D): y=n$

(D) يوازي محور الأراتيب يكافئ

$(D): x=m$



3 - $\vec{u}(a;b)$ موجهة ل (D)

$(OI)\parallel(D)$ يكافئ $b=0$

$(OJ)\parallel(D)$ يكافئ $a=0$

4- كل مستقيم (D) لا يوازي محور الأراتيب له معادلة ديكارتية على الشكل : $(D): y=mx+p$

و تسمى المعادلة المختصرة (المختزلة) للمستقيم (D)

- m المعامل الموجه ل (D)

- p الأرتوب عند الأصل

$\vec{u}(1;m)$ متجهة موجهة ل (D)

ملخص

$\vec{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان	
معادلة ديكارتية	معادلة بارامترية
$\det(\vec{AM};t\vec{u})=0$	$\vec{AM}=t\vec{u}$

II) الأوضاع النسبية لمستقيمين

خاصية1

(D) موجه ب $\vec{u}$ و (D') موجه ب $\vec{u}'$

$(D)\parallel(D')$ يكافئ $\det(\vec{u};\vec{u}')=0$

(D) يقطع (D') يكافئ $\det(\vec{u};\vec{u}')\neq 0$

خاصية2

$(D): y=mx+p$ و $(D'): y=m'x+p'$

$(D)\parallel(D')$ يكافئ $m=m'$

(D) يقطع (D') يكافئ $m\neq m'$

الحدوديات

1- حدودية من الدرجة n

تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}$ و $a_n;a_{n-1};.......a_1;a_0$ أعداد حقيقية $(a_n\neq 0)$

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

$p(x)$ أو p تسمى حدودية من الدرجة n

نرمز : $\deg p = n$

a_i $(0\le i\le n)$ يسمى معامل الحد من الدرجة i

$a_n;a_{n-1};.......a_1;a_0$ معاملات الحدودية p

مثال :

$p(x)=4x^5-3x^2+2x-5$

$\deg p = 5$

-3 هو معامل الحد من الدرجة 2

0 هو معامل الحد من الدرجة 4

-6 هو معامل الحد من الدرجة 0

2- العمليات على الحدوديات

- مجموع حدوديتين هي حدودية
- جداء حدوديتين هي حدودية

$(\deg pq = \deg p+\deg q)$

- عدد حقيقي في حدودية هي حدودية

3-القسمة على x-a (a عدد حقيقي)

خاصية

لتكن p حدودية من الدرجة **n** $(n\geq 1)$ و **a** عدد حقيقي
توجد حدودية وحيدة q درجتها **n-1** و عدد حقيقي وحيد **R**
بحيث :

$$p(x)=(x-a)q(x)+R$$

q هو خارج القسمة الأقليدية ل p على $x-a$
R هو باقي القسمة الأقليدية ل p على $x-a$

ملاحظة

1- إذا كان $p(x)=(x-a)q(x)+R$ فإن $p(a)=R$
2- a جذر ل p يكافئ $p(a)=0$
يكافئ $x-a$ تقسم p
يكافئ باقي القسمة الأقليدية ل p على $x-a$ هو **0**

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى و النظمات

1- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف

a و b عددان حقيقيان معلومان
x عدد حقيقي
المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث المجهول هو x هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل : $ax+b=0$

خاصية :

حل المعادلة : $ax+b=0$ في $\mathbb{R}$ هو:

- $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ إذا كان $a\neq 0$
- $S=\mathbb{R}$ إذا كان $a=0\ ;\ b=0$
- $S=\varnothing$ إذا كان $a=0\ ;\ b\neq 0$

2- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف

$$ax+b<0\ ;\ ax+b>0\ ;\ ax+b\leq 0\ ;\ ax+b\geq 0$$

هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

3- إشارة الحدانية $ax+b$ $(a\neq 0)$

$ax+b=0$ يعني $x=-\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	**0**	إشارة a

4 - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف

a و b و c اعداد حقيقية معلومة
x و y عددان حقيقيان.
المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حيث المجهولين هما x و y هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل :

$$ax+by+c=0$$

5- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

حل النظمة :

$$(a;b)\neq(0;0)\quad ;\quad (\alpha;\beta)\neq(0;0)$$

$$(1)\begin{cases}ax+by=c\\ \alpha x+\beta y=\gamma\end{cases}$$

محددة النظمة $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}=a\beta-b\alpha$

أ - إذا كان : $\Delta=0$
فإن النظمة **(1)** إما ليس مها حل أو لها ما لا نهاية من الحلول

ب - إذا كان : $\Delta\neq 0$
فإن : $y=\dfrac{\begin{vmatrix}a & c\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}}\quad ;\quad x=\dfrac{\begin{vmatrix}c & b\\ \gamma & \beta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}}$

6- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين " تجويه المستوى"

خاصية "مقبولة"

(D) مستقيم معادلته : $y=ax+by+c$ ؛
$(a;b)\neq(0;0)$
المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى مفتوحين (P^+) و (P^-)

$$(P_+)=\{M(x;y)\in(P)/ax+by+c>0\}$$
$$(P_-)=\{M(x;y)\in(P)/ax+by+c<0\}$$

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

I) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- تعريف

a و b و c أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$
x عدد حقيقي
المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد حيث المجهول هو x هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل :

$$ax^2+bx+c=0$$

$\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميزها

2- مبرهنة

نعتبر المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

Δ مميزها و S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$

إذا كان : $\Delta>0$ فإن $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

إذا كان : $\Delta=0$ فإن $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان : $\Delta<0$ فإن $S=\varnothing$

ملاحظة

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

فإن : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

3- خاصية

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

فإن : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$

II – المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

إشارة التعبير: ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

نعتبر المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ يسمى Δ مميزها

1- إذا كان : $\Delta>0$ و x_1 و x_2 حلا المعادلة $ax^2+bx+c=0$

(نفترض $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2+bx+c=0$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

2- - إذا كان : $\Delta=0$ و x_1 حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$ax^2+bx+c=0$		إشارة a	0	إشارة a	

3- إذا كان : $\Delta<0$ فإن $ax^2+bx+c=0$ و a لهما نفس الإشارة

الحساب المثلثي

I) - وحدات قياس زاوية

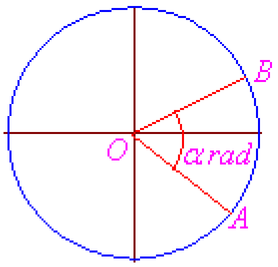
$C(o;r)$ دائرة

وحدات قياس زاوية هي :

الراديان : rad

الدرجة : $...^{\circ}$

الغراد : gr



(بوحدة قياس المسافة)

$\overset{\frown}{AB}=\alpha r$

(بوحدة قياس المساحة)

$S=\frac{\alpha}{2}r^2$

إذا كان $\gamma;\beta;\alpha$ قياسات نفس الزاوية على التوالي ب :

الرديان ؛ الدرجة ؛ الغراد

($0\le\gamma\le 200;0\le\beta\le 180;0\le\alpha\le\pi$)

فإن : $\frac{\gamma}{200}=\frac{\beta}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$

تعريف

نعتبر الدائرة : $C(O;1)$ و A و B نقطتان من الدائرة (C)

قياس الزاوية الهندسية $[\widehat{AOB}]$ بالرديان هو قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$

$\widehat{AOB}=\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{AB}$ بوحدة قياس المسافة

$\widehat{AOB}$ بالرديان ($0\le\widehat{AOB}\le\pi$)

II) – الدائرة المثلثية

$(O;I;J)$ معلم متعامد ممنظم

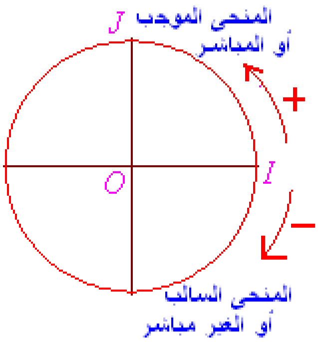
نعتبر الدائرة : $C(O;1)$

$I\in(C)$ و $J\in(C)$

(في الشكل)

الدائرة : $C(O;1)$ موجهة توجيها موجبا

(C) تسمى الدائرة المثلثية

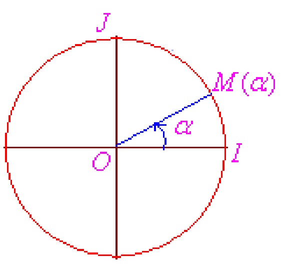


III) – الأفاصيل المنحنية لدائرة

$-\pi\le\alpha\le\pi$; $\widehat{IOM}=\alpha\,rad$

α يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M

نرمز : $M(\alpha)$



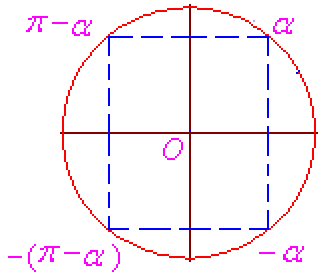
إذا كان : $-\pi \le \alpha \le \pi$

فإن : α يسمى أفصولا منحنيا رئيسيا للنقطة M

و هو وحيد :

ملاحظة

- مهما يكن $k \in \mathbb{Z}$ فإن : $M'(\alpha+2\pi)=M(\alpha)$
- $\alpha+2k\pi$ هو كذلك أفصول منحنى للنقطة M



IV) الزاوية الموجهة لنصفى مستقيمين لهما نفس الأصل و قياساتها

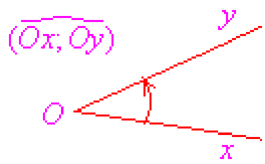
تعريف1

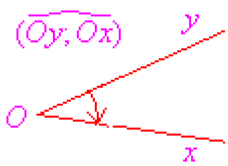
الزوج $([Ox);[Oy))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين

نرمز لها ب : $(\widehat{Ox;Oy})$

الزوج $([Oy);[Ox))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين

نرمز لها ب : $(\widehat{Oy;Ox})$





تعريف 2

α هو قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$

α هو أفصول منحنى للنقطة M

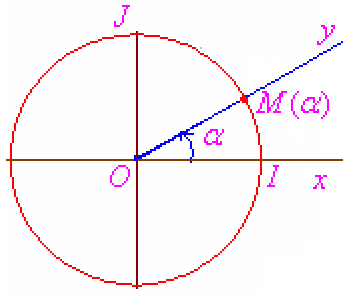
بما أن : $\alpha+2k\pi$ هو كذلك أفصول منحنى للنقطة M

فإن : $\alpha+2k\pi$ هو كذلك قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$

$k \in \mathbb{Z}$

إذا كان : $\overline{(Ox;Oy)}$ أحد هذه القياسات

فإن : $\overline{(Ox;Oy)}=\alpha+2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$



V) الزاوية الموجهة لمتجهتين و قياساتها

تعريف

الزوج $(\vec{u};\vec{v})$ يحدد زاوية موجهة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$

نرمز إليها ب : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

قياسات $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي قياسات $(\widehat{Ox;Oy})$

نكتب : $\overline{(\vec{u};\vec{v})}=\overline{(Ox;Oy)}$

نتائج

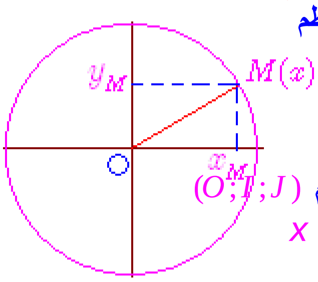
$\overline{(\vec{u};\vec{u})}=2k\pi$ ؛ $\overline{(\vec{u};\vec{v})}=-\overline{(\vec{v};\vec{u})}+2k\pi$

$\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\overline{(\vec{u};\vec{v})}+\overline{(\vec{v};\vec{w})}+2k\pi$

VI)- النسب المثلثية لعدد حقيقي

معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

دائرة مثلثية $C(O;1)$



$M(x)\in(C)$ ؛ $x \in \mathbb{R}$

$M(x_M;y_M)$ بالنسبة للمعلم $(O;I;J)$

$\cos x = x_M$ جيب تمام x

$\sin x = y_M$ جيب x

نتائج

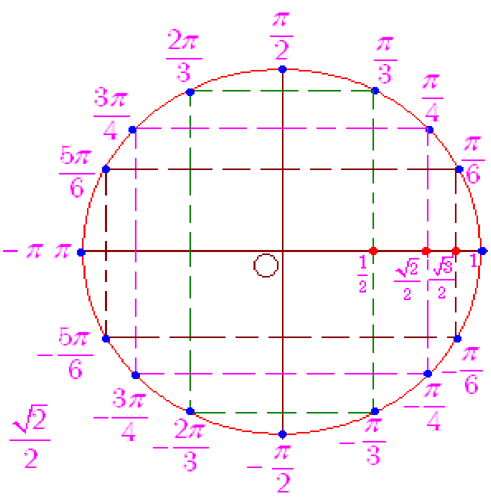
مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن :

-1 $-1 \le \cos x \le 1$ ؛ $-1 \le \sin x \le 1$

-2 $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$

-3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



VII) علاقات مثلثية

$x \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \quad ; \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$$

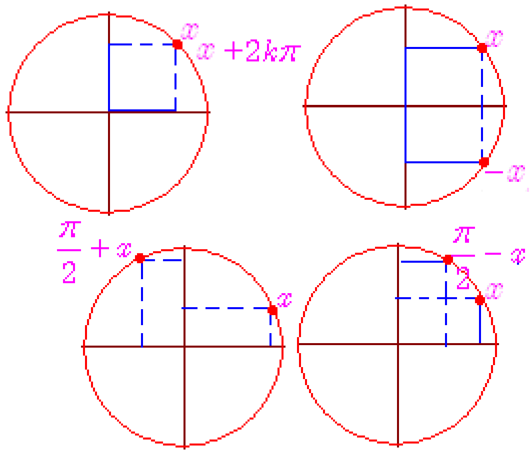
$$\sin(-x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(-x)=\cos x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x \quad ; \quad \cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \quad ; \quad \cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x \quad ; \quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$\sin(\pi+x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(\pi+x)=-\cos x$$



الدوال العددية

I) تذكير

1- تعريف دالة

الدالة f هي علاقة بين مجموعتين A و B بحيث لكل عنصر x من A علاقة وحيدة على الأكثر بعنصر y من B.

A تسمى مجموعة انطلاق f .

B تسمى مجموعة وصول f .

y هي صورة x بالدالة f . نرمز : $f(x)=y$

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

مثال

$f =$ عدد ساعات الدراسة

$A = \{$ الأحد ؛ الاثنين؛..... $\}$ $\quad B=\{3;4;5;6;7;8\}$

$f($الأحد$)$ غير معرفة

2- مجموعة تعريف دالة

مجموعة تعريف الدالة f تتكون من عناصر مجموعة الانطلاق التي لها صورة ب f .

نرمز لها ب : D_f

مثال

في المثال السابق : $D_f = A - \{$الأحد$\}$

3- الدالة العددي

إذا كان : A و B جزئين من $\mathbb{R}$ فإن f تسمى دالة عددية

مثال

أ- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2x-3$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

ب- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{2x^2-3}{(3x-6)(x+4)}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-4;2\}$

ج- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{2x+10}$ $\qquad D_f = [-5;+\infty[$

4- التمثيل المبياني لدالة عددية

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد للمستوى .

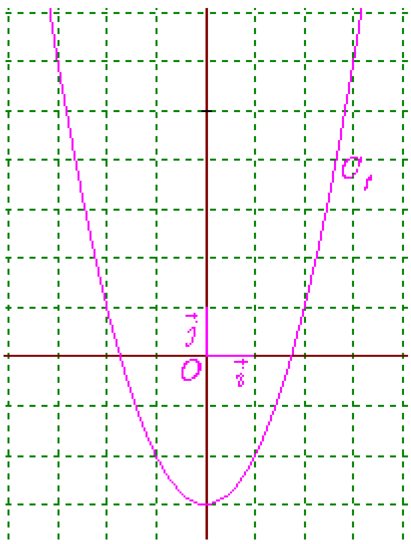
كل دالة عددية f لها تمثيل مبياني " منحنى" نرمز له ب : C_f

$$C_f = \{M(x;f(x)) \in (P) / x \in D_f\}$$

مثال

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2-3$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	-1	-2	-3	-2	-1	6



II) الدوال العددية الزوجية و الفردية

1) الدالة العددية الزوجية

أ- تعريف

f دالة عددية لمتغير حقيقي x

D_f مجموعة تعريفها

f دالة زوجية يكافئ :

1- إذا كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

2- $f(-x) = f(x)$ مهما يكن x من D_f

ب- منحنى دالة زوجية

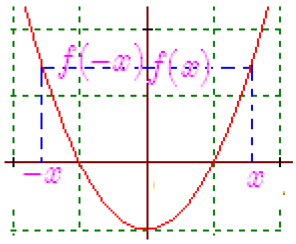
خاصية

f دالة زوجية يكافئ C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

مهما يكن $x \in D_f$

$M\,(x; f\,(x)) \in C_f$ يكافئ $M\,(-x; f\,(x)) \in C_f$



2) الدالة العددية الفردية

أ- تعريف

f دالة عددية لمتغير حقيقي x

D_f مجموعة تعريفها

f دالة فردية يكافئ :

1- إذا كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

2- $f(-x) = -f(x)$ مهما يكن x من D_f

ب- منحنى دالة فردية

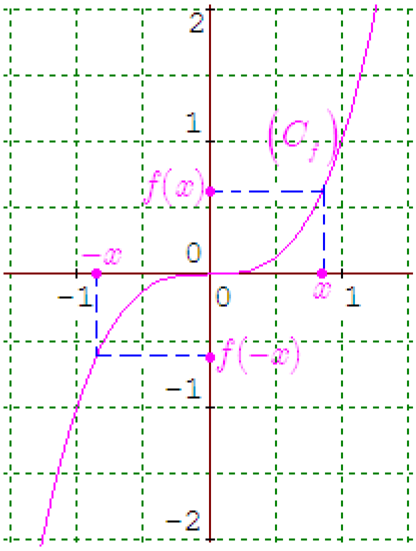
خاصية

f دالة فردية يكافئ $\left(C_f\right)$ متماثل بالنسبة لأصل المعلم

ملاحظة

مهما يكن $x \in D_f$

$M\,(x; f\,(x)) \in C_f$ يكافئ $M\,(-x; -f\,(x)) \in C_f$



3- منحى تغيرات دالة

تعريف

f دالة عددية لمتغير حقيقي x

I مجال ضمن D_f

- f تزايدية على I يعني : مهما يكن x و x' من I إذا كان : $x < x'$ فإن $f(x) \le f(x')$
- f تزايدية قطعا على I يعني : مهما يكن x و x' من I إذا كان : $x < x'$ فإن $f(x) < f(x')$
- f تناقصية على I يعني : مهما يكن x و x' من I إذا كان : $x < x'$ فإن $f(x) \ge f(x')$
- f تناقصية قطعا على I يعني : مهما يكن x و x' من I إذا كان : $x < x'$ فإن $f(x) > f(x')$

ملاحظة

- كل دالة تناقصية أو تزايدية على I تسمى دالة رتيبة على I
- كل دالة تناقصية قطعا أو تزايدية قطعا على I تسمى دالة رتيبة قطعا على I

4) معدل تغيرات دالة

تعريف

f دالة عددية لمتغير حقيقي x

D_f مجموعة تعريفها .

x و x' عنصرين من D_f " $x \neq x'$ "

$\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ يسمى معدل تغيرات الدالة f بين x و x'

خاصية

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و I مجال ضمن D_f

- f تزايدية على I إذا كان معدل تغيراتها بين x و x' موجبا مهما يكن x و x' من I
- f تزايدية قطعا على I إذا كان معدل تغيراتها بين x و x' موجبا قطعا مهما يكن x و x' من I

- f تناقصية على I إذا كان معدل تغيراتها بين x و x' سالبا مهما يكن x و x' من I
- f تناقصية قطعا على I إذا كان معدل تغيراتها بين x و x' سالبا قطعا مهما يكن x و x' من I

ملاحظة

1- f دالة زوجية و $I \subset \mathbb{R}^+ \cap D_f$
إذا كانت f تزايدية " تناقصية" على I فإنها تناقصية " تزايدية " على مماثل I بالنسبة ل O

2- f دالة فردية و $I \subset \mathbb{R}^+ \cap D_f$
إذا كانت f تزايدية " تناقصية" على I فإنها تزايدية " تناقصية " على مماثل I بالنسبة ل O

5- القيم الدنيا و القيم القصوى

تعريف

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها .

1- f تقبل قيمة قصوى $f(\alpha)$ عند α يعني يوجد مجال مفتوح I
بحيث : $\alpha \in I$ وَ $f(x) \le f(\alpha)$ لكل x من I

2 - f تقبل قيمة دنيا $f(\beta)$ عند β يعني يوجد مجال مفتوح I
بحيث : $\beta \in I$ وَ $f(x) \ge f(\beta)$ لكل x من I

ملاحظة

1- إذا كانت f تزايدية قطعا على $[a;b]$ و f تناقصية قطعا على $[b;c]$ فإن f تقبل قيمة قصوى عند b

2 - إذا كانت f تناقصية قطعا على $[a;b]$ و f تزايدية قطعا على $[b;c]$ فإن f تقبل قيمة دنيا عند b

3 - f دالة زوجية
إذا كانت f تقبل قيمة قصوى عند b
فإن f تقبل قيمة قصوى عند $-b$

4- f دالة فردية
إذا كانت f تقبل قيمة قصوى عند b
فإن f تقبل قيمة دنيا عند $-b$

الشلجم و الهدلول

1) الشلجم

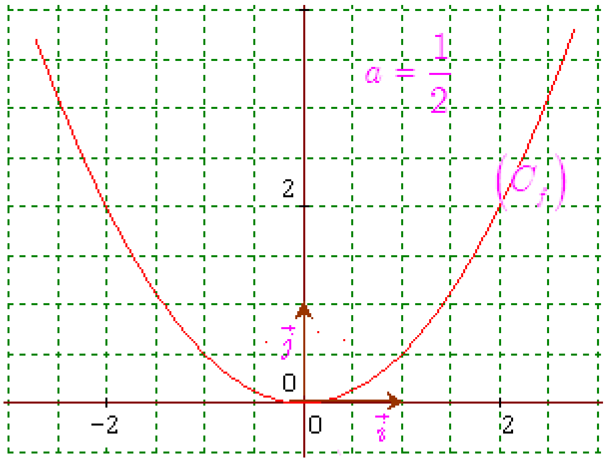
نعتبر الدالة : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $x \mapsto ax^2$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

أ - $a > 0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

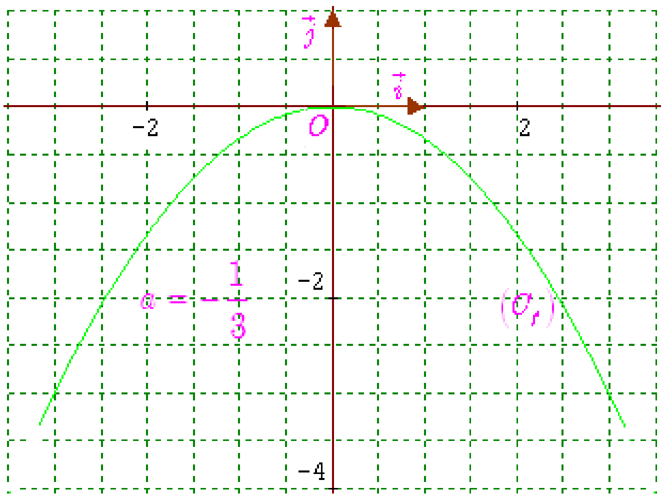


يسمى (C_f) شلجما رأسه O و محوره محور الأراتيب

ب - $a < 0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	



منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

يسمى (C_f) شلجما رأسه O و محوره محور الأراتيب

تعريف

المنحنى الممثل للدالة $f(x)=ax^2$ " $a\neq 0$ " يسمى شلجما رأسه O و محوره محور الأراتيب

2- الهذلول

نعتبر الدالة : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \frac{a}{x}$ $\quad a\in\mathbb{R}^*$

أ - $a>0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

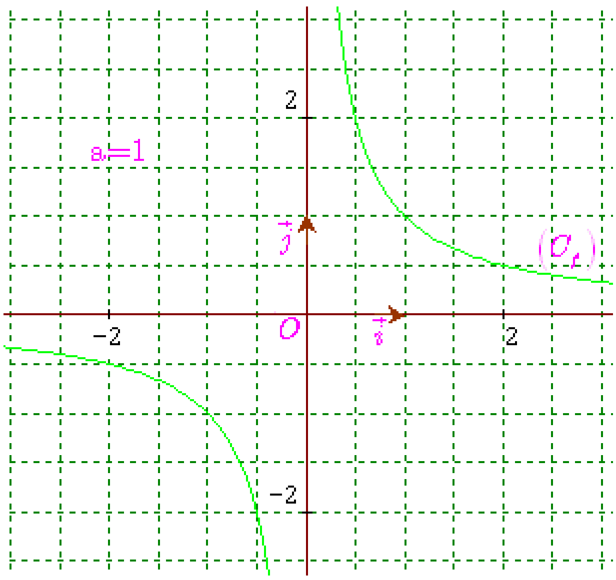
يسمى (C_f) هذلولا رأسه O و مقارباه محور الأراتيب و محور الأفاصيل

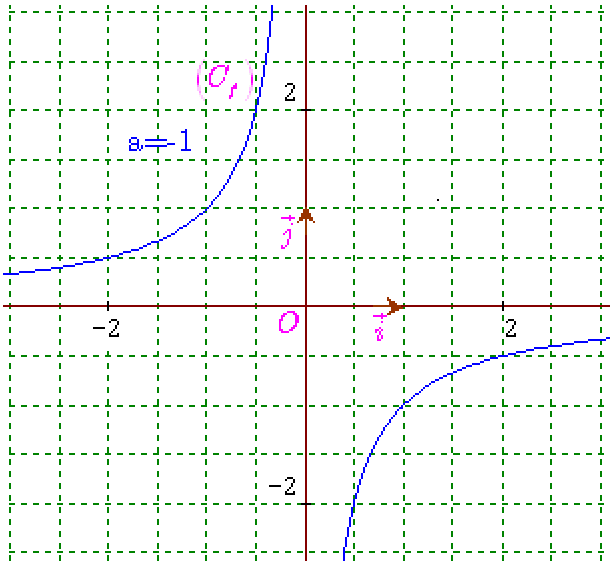
ب- $a<0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$





يسمى (C_f) هذلولا رأسه O و مقارباه محور الأراتيب و محور الأفاصيل

تعريف

المنحنى الممثل للدالة $f(x)=\frac{a}{x}$ " $a\neq 0$ " يسمى هذلولا رأسه O و مقارباه محور الأراتيب و محور الأفاصيل

3- دالة من نوع : $x\to -f(x)$

معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$M(x;f(x))\in(C_f)$ يكافئ $M'(x;-f(x))\in(C_{-f})$

يعني (C_f) و (C_{-f}) متماثلين بالنسبة لمحور الأفاصيل

4- دالة من نوع : $x\to f(x)+a$

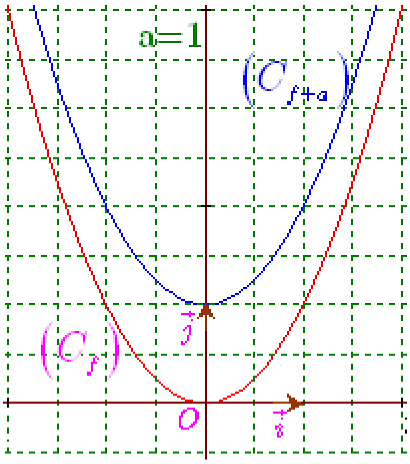
معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$M(x;f(x))\in(C_f)$ يكافئ

$M'(x;f(x)+a)\in(C_{f+a})$

يعني : $\overrightarrow{MM'}=a\vec{j}$

يعني : $t_{a\vec{j}}(C_f)=(C_{f+a})$



5- دالة من نوع : $x \to f(x+a)$

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم

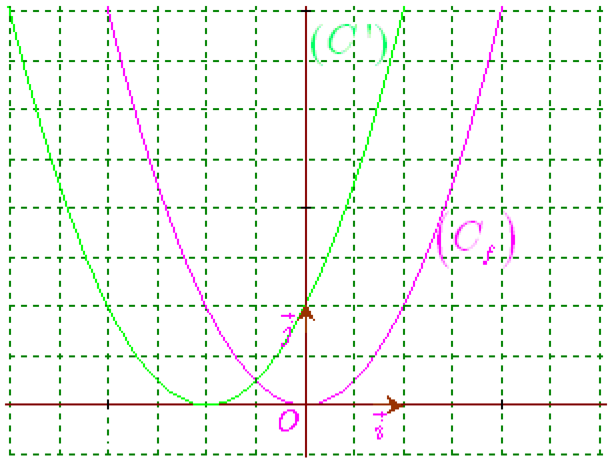
(C') منحنى $x \to f(x+a)$

$M(x;f(x)) \in (C_f)$ يكافئ

$M'(x;f(x+a)) \in (C')$

يعني : $\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i}$

يعني : $t_{-a\vec{i}}(C_f) = (C')$



6- دالة من نوع : $x \to f(x+a)+b$

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم

خاصية

إذا كان : $g(x) = f(x+a)+b$

فإن : $t_{-a\vec{i}+b\vec{j}}(C_f) = (C_g)$

ملاحظة

أ- إذا كان : (C_f) شلجما رأسه O و محوره محور الأراتيب

فإن : (C_g) شلجم رأسه $A(-a,b)$ و محوره المستقيم $x=-a$

ب- إذا كان : (C_f) هذلولا رأسه O و مقارباه محور الأراتيب و محور الأفاصيل

فإن : (C_g) هذلول رأسه $A(-a,b)$ و مقارباه $x=-a$ و $y=b$

التحويلات الإعتيادية

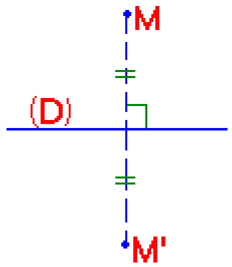
I) التحويلات الإعتيادية

1) التماثل المحوري

تعريف

(D) مستقيم ضمن المستوى)

M نقطة من المستوى



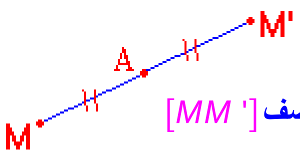
إذا كان $M \in (D)$

فإن : $S_{(D)}(M) = M$

إذا كان $M \notin (D)$

فإن : $S_{(D)}(M) = M'$ يكافئ (D) واسط $[MM']$

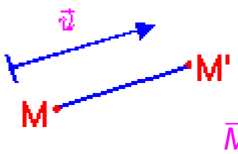
2) التماثل المركزي



A نقطة من المستوى

$S_A(M) = M'$ يكافئ A منتصف $[MM']$

3) الإزاحة



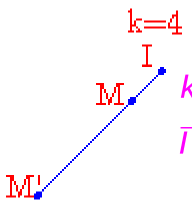
$\vec{u}$ متجهة

$t_{\vec{u}}$ الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$

$t_{\vec{u}}(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

4) التحاكي

$k \in \mathbb{R}^*$ و $I \in (P)$



$h_{(I;k)}$ التحاكي الذي مركزه I و نسبته k

$h_{(I;k)}(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

$\overrightarrow{IM'} = 4\overrightarrow{IM}$

ملاحظة

التماثل المحوري ؛ التماثل المركزي ؛ الإزاحة ؛ التحاكي تسمى تحويلات اعتيادية في المستوى

نرمز لها ب : T

II) خاصيات

1- النقط الصامدة

أ- النقط الصامدة ب $S_{(D)}$ هي (D)

ب- النقط الصامدة ب S_A هي A

ج- النقط الصامدة ب $h_{(I;k)}$ هي I $(k \neq 1)$

د – لا توجد أي نقطة صامدة ب $t_{\vec{u}}$ $(\vec{u} \neq 0)$

2) خاصيات مميزة

ليكن $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

أ - T تماثل مركزي يكافئ $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$

ب - T تحاكي يكافئ $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

ج- T إزاحة يكافئ $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

3) استقامية النقط

خاصية

التحويلات الاعتيادية تحافظ على استقامية النقط

يعني

إذا كان $A\,;B\,;C$ نقط مستقيمية

و $T(A)=A'; T(B)=B'; T(C)=C'$

فإن $A';B';C'$ نقط مستقيمية

4) توازي مستقيمين

خاصية

التحويلات الاعتيادية تحافظ على توازي مستقيمين

يعني

إذا كان $(D)\parallel(\Delta)$ و $T(D)=D'$ و $T(\Delta)=\Delta'$

فإن : $(D')\parallel(\Delta')$

5) صورة زاوية

خاصية

التحويلات الاعتيادية تحافظ على قياس زاوية

يعني

إذا كان $T(A)=A'; T(B)=B'; T(C)=C'$

فإن : $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$

6) تعامد مستقيمين

خاصية

التحويلات الاعتيادية تحافظ على تعامد مستقيمين

يعني

إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ و $T(D)=D'$ و $T(\Delta)=\Delta'$

فإن : $(D')\perp(\Delta')$

7) صورة مستقيم

خاصية

صورة مستقيم بالتحويلات الاعتيادية (التماثل المركزي ؛ الإزاحة ؛ التحاكي) هو مستقيم يوازيه

يعني

$t_{\vec{u}}(D)\parallel(D)$ ؛ $S_A(D)\parallel(D)$ ؛ $h(D)\parallel(D)$

8) صورة دائرة

$$S_{(D)}(C(O;R))=C(S_{(D)}(O);R)$$

$$S_A(C(O;R))=C(S_A(O);R)$$

$h_{(I;k)}$ $$h(C(O;R))=C(h(O);|k|R)$$

$$t_{\vec{u}}(C(O;R))=C(t_{\vec{u}}(O);R)$$

9) صورة قطعة

خاصية

صورة قطعة بالتحويلات الاعتيادية (التماثل المركزي ؛ التماثل المحوري الإزاحة) هي قطعة تقايسها

10) منتصف قطعة

خاصية

التحويلات الاعتيادية تحافظ على منتصف قطعة

يعني

إذا كان $T[AB]=[EF]$ و I منتصف $[AB]$

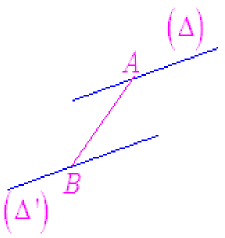
فإن : $T(I)$ منتصف $[EF]$

ملاحظة :

-1 T تماثل مركزي أو إزاحة أو تحاكي

إذا كان : $(\Delta)\parallel(\Delta')$ و $T(A)=B$

فإن : $T(\Delta)=\Delta'$



-2 $(D)\cap(\Delta)=\{E\}$

يكافئ : $T(D)\cap T(\Delta)=\{T(E)\}$

الجداء السلمي

I) الجداء السلمي

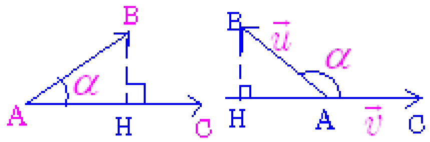
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتان غير منعدمتان

$P_{(AC)}(B)=H$

الجداء السلمي ل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\cdot AC$ إذا كان ل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AH}$ نفس المنحى

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AH\cdot AC$ إذا كان ل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AH}$ منحيان متعاكسان



خاصية

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان غير منعدمتان . α الزاوية المرتبطة بهما

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان أحدهما منعدما

نتيجة

- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- $\vec{0}$ عمودي على جميع متجهات المستوى
- $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

II) خاصيات الجداء السلمي

-1 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

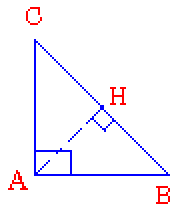
-2 $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

-3 $a\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(a\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$

نتائج

$$\vec{w}(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\vec{u}+\vec{w}\vec{v}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

ملاحظة $\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\neq\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$



II) العلاقات المترية

خاصية

ABC مثلث قائم الزاوية في A

$P_{(AC)}(B)=H$

-1 $BC^2=AB^2+AC^2$ " علاقة فيتاغورس

-2 $BA^2=BH\cdot BC$

-3 $AH^2=HB\cdot HC$

IV) مبرهنة الكاشي

مبرهنة

ABC مثلث

لدينا : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\widehat{BAC}$

V) مبرهنة المتوسط

مبرهنة

A و B نقطتان من المستوى و I منتصف القطعة $[AB]$

M نقطة من المستوى

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$$
$$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

خاصية1

ABC مثلث

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC}$$

خاصية2

ABC مثلث

$$\frac{2S_{ABC}}{AB\cdot AC\cdot BC}=\frac{\sin\widehat{A}}{BC}=\frac{\sin\widehat{B}}{AC}=\frac{\sin\widehat{C}}{AB}$$

ملاحظة

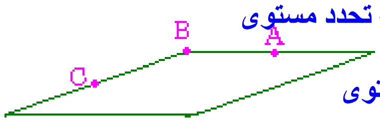
يمكن الاكتفاء ب : $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$

عوضا عن : **IV** و **V**

الهندسة الفضائية
التقاطع و التوازي في الفضاء

I) المستوى

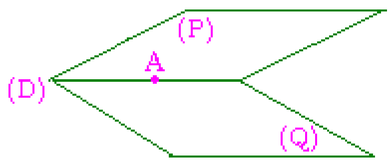
- ثلاث نقط غير مستقيمية تحدد مستوى



النقط $C;B;A$ تحدد مستوى

نرمز له ب : (ABC)

- مستقيمان متقاطعان قطعا يحددان مستوى
- مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى
- مستقيم و نقطة خارجه يحددان مستوى
- إذا كان لمستويين مختلفين نقطة مشتركة فهما يتقاطعان في مستقيم يمر من هذه النقطة .



II) الأوضاع النسبية لمستقيمين

(D) و (D') مستقيمان ضمن الفضاء

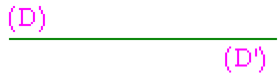
(D) و (D') يكونان إما :

1- مستوائيان :

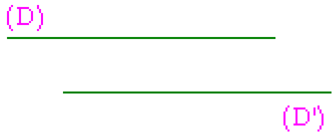
يوجدان ضمن نفس المستوى

فهما إما :

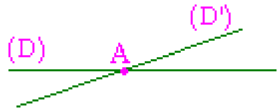
- منطبقين :



- متوازيين :



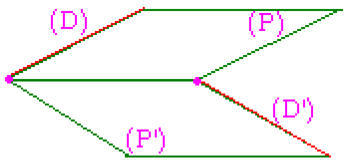
متقاطعين :



2- غير مستوائيان

لا يوجدان ضمن نفس المستوى

فهما غير متقاطعين غير متوازيين



ملاحظة

للبرهنة أن (D) و (D') غير مستوائيان

نجد مستويان (P) و (P') بحيث :

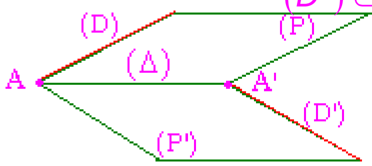
$(D) \subset (P)$ و $(D') \subset (P')$

و $(P) \cap (P') = (\Delta)$

و $(D) \cap (\Delta) = \{A\}$

و $(D') \cap (\Delta) = \{A'\}$

و $A \neq A'$

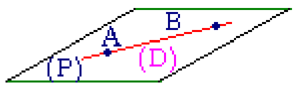


III) الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى

(D) مستقيم ضمن الفضاء

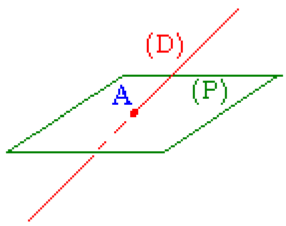
(P) مستوى ضمن الفضاء

- المسقيم ضمن المستوى



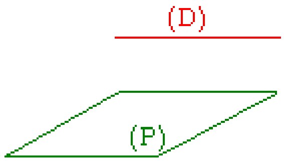
$(D) \subset (P)$

- المستقيم و المستوى يتقاطعان في نقطة



$(D) \cap (P) = \{A\}$

- المستقيم و المستوى لا يتقاطعان



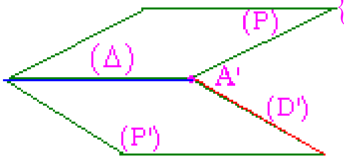
$(D) \cap (P) = \varnothing$

نقول أن (D) يوازي (P)

نرمز : $(D) \parallel (P)$

ملاحظة

1 - لتحديد A' نقطة تقاطع مستقيم (D') و مستوى (P)



لدينا : $\{A'\} = (P) \cap (D')$

نجد (P') بحيث

$(D') \subset (P')$

$(P) \cap (P') = (\Delta)$

بما ان $(P) \cap (D') \subset (P) \cap (P')$

فإن : $A' \in (\Delta)$

و منه : $(D') \cap (\Delta) = \{A'\}$

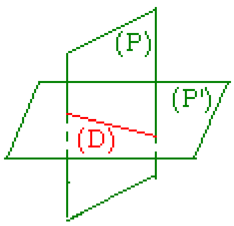
2- للبرهنة على استقامية ثلاث نقط نبرهن أن هذه النقط تنتمي إلى تقاطع مستويين مختلفين (نفس الشكل السابق)

IV) الأوضاع النسبية لمستويين

(P) و (P') مستويان في الفضاء

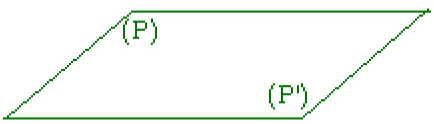
(P) و (P') يكونان إما :

- متقاطعين



$(P) \cap (P') = (D)$

- منطبقين

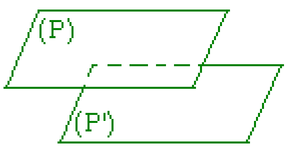


$(P) = (P')$

- غير منطبقين

$(P) \cap (P') = \varnothing$

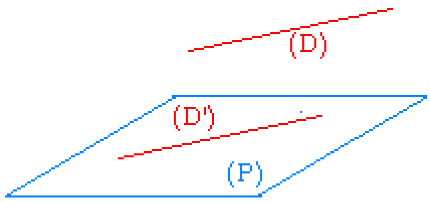
نقول أن (P) و (P') متوازيان



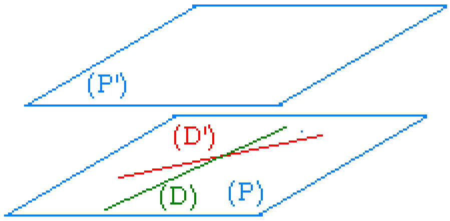
نرمز : $(P) \parallel (P')$

V) نتائج وملاحظات

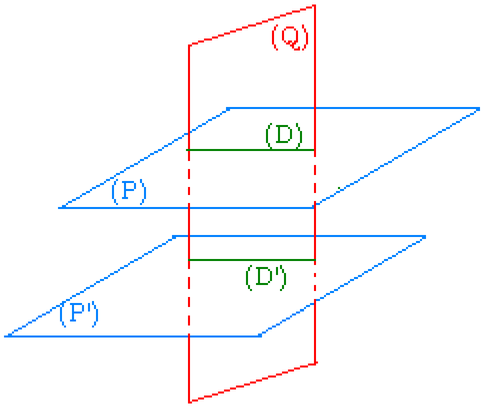
1- يكون مستقيم موازيا لمستوى
إذا وجد ضمن هذا المستوى مستقيم يوازيه



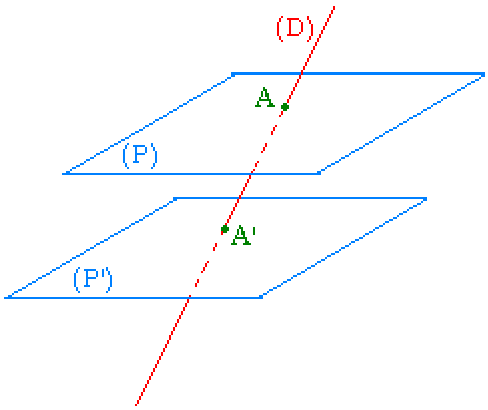
2- يكون مستويان متوازيين
إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين
متقاطعين و موازيين للمستوى الآخر



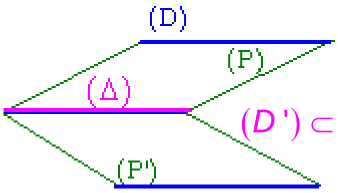
3- إذا توازى مستويان
فإن كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الثاني
و مستقيما تقاطعه معهما يكونان متوازيين



4- إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يقطع أحدهما يقطع الآخر



5- إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فإن تقاطعهما يكون مستقيما موازيا لهذين المستقيمين



إذا كان :
$(P)\cap(P')=(\Delta)$
$(D)\subset(P)$ و $(D')\subset(P')$
بحيث : $(D)\parallel(D')$
فإن : $(D)\parallel(D')\parallel(\Delta)$ (D')

الهندسة الفضائية التعامد في الفضاء

I) المستقيمات المتعامدة

يكون مستقيمان متعامدين في الفضاء إذا وجد مستقيمان مستوائيان
متعامدان موازيان لهما .

ملاحظة

إذا كان : $(D)\perp(\Delta)$
$(D)\parallel(\Delta')$
فإن : $(\Delta)\perp(\Delta')$

II) تعامد مستقيم ومستوى

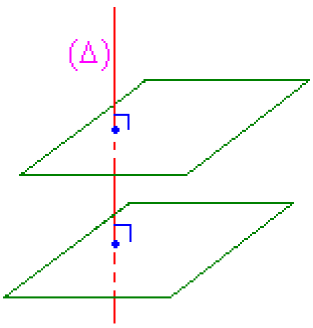
تعريف

يكون مستقيم عموديا على مستوى إذا كان عموديا على جميع مستقيمات
هذا المستوى

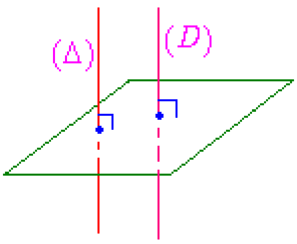
خاصية " مقبولة"

يكون مستقيم عموديا على مستوى إذا كان عموديا على مستقيمين
متقاطعين ضمن هذا المستوى

ملاحظة



1- إذا كان : $(Q)\parallel(P)$
و $(\Delta)\perp(P)$
فإن : $(\Delta)\perp(P)$

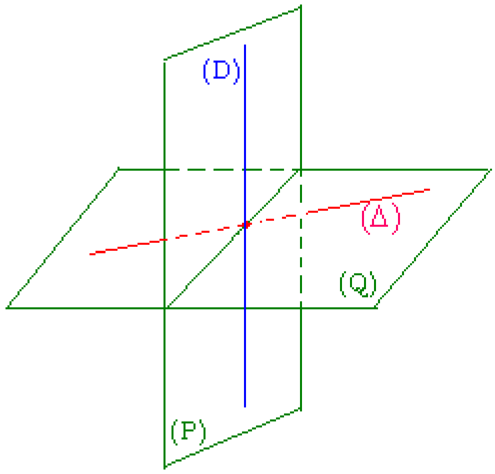


2- إذا كان : $(\Delta)\parallel(D)$
و $(\Delta)\perp(P)$
فإن : $(D)\perp(P)$

III) تعامد مستويين

تعريف

يكون مستويان متعامدان إذا وجد ضمن أحدهما مستقيم عمودي على الآخر



ملاحظة

تعامد مستويين لا يعني بالضرورة أن كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على الآخر